

流体弹塑性介质中波动与断裂计算的 二阶 GODUNOV 方法^{*1)}

汤寒松²⁾

(北京航空航天大学)

A SECOND-ORDER GODUNOV METHOD FOR COMPUTING WAVE AND FRACTURE PROBLEMS IN HYDRO-ELASTO-PLASTIC BODIES

H. S. Tang

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing)

Abstract

A finite difference method is proposed for modeling wave motion and fracture phenomenon in hydro-elasto-plastic bodies. The method is a Godunov type approach, and it has second-order accuracy and captures shocks and fracture zones with high resolution. In the class of given wave systems the Riemann problems involved in the method have unique solutions, and the solutions can be obtained with efficient procedures. Numerical results are satisfactory in computations of Riemann problems and spallation in a steel plate.

Keywords: Hydro-elasto-plastic body, Wave, Fracture, Riemann problem, Godunov method

关键词: 流体弹塑性介质, 波动, 断裂, Riemann 问题, Godunov 方法

1. 引 言

工程实践的发展已使得研究弹塑性波动问题的高精度、高分辨率数值方法成为日益重要的课题. 复杂的材料特性等因素给这方面的研究带来了相当的困难. 近些年来, 人们在以气体力学 Godunov 方法为基础的方向上取得了进展, 参见文献 [1,2,3]. 本文将在此方向上, 建立一种新的弹塑性介质中波动、断裂现象的高精度、高分辨率数值模拟方法.

流体弹塑性体是一种兼有固体与流体特征的弹塑性模型^[4]. 这种模型自然、连续地描述了固体与流体间的过渡, 在爆炸、高速碰撞等问题中经常被采用. 此外, 我们以 van Leer 的

* 1998 年 1 月 6 日收到.

1) 国家自然科学基金及航空基金部分资助项目.

2) 现地址: School of Civil and Environmental Engineering, Georgia Institute of Technology, Atlanta, GA 30332, USA.

MUSCL 格式 [5] 为框架提出了一种气、水、空穴系统运动的高精度格式 [6], 并用其解释了实验中的疑问 [7]. 本文将以流体弹塑性体为模型并参照 [6] 中的方法.

文中所建立的数值方法具有二阶精度, 对弹、塑性激波具有高分辨率, 并能跟踪断裂面的发生与运动. 与方法相关的 Riemann 问题的解存在、唯一、并有良好的求解性.

2. 控制方程与断裂模型

Lagrange 坐标中弹塑性介质一维应变平面运动的控制方程为守恒律方程组:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial r} = 0, \quad (2.1a)$$

其中

$$U = (V, u)^T, \quad F(U) = (-u, P)^T. \quad (2.1b)$$

上述方程中 t 为时间, r 为质量坐标, $V = \rho_{ref.}/\rho$, $P = p/\rho_{ref.}$, 而 $\rho_{ref.}$, ρ , u , p 分别为参考密度, 密度, 速度, 应力.

流体弹塑性介质的本构关系可表示为

$$p = w(V) + \frac{4}{3}s(V_o, \tau_o, V), \quad (2.2a)$$

其中静水压力为 Murnagham 方程

$$w(V) = \frac{m}{\beta} \left(\left(\frac{V_a}{V} \right)^\beta - 1 \right) + p_a, \quad (2.2b)$$

剪切应力为 Huber-Mises 准则

$$s(V_o, \tau_o, V) = \begin{cases} \tau, & |\tau| < Y/2, \\ Y \operatorname{sign}(\tau)/2, & |\tau| \geq Y/2 \end{cases} \quad (2.2c)$$

及由 Hooke 定律

$$\tau - \tau_o = -G \ln \frac{V}{V_o}. \quad (2.2d)$$

上述 G , Y 分别为剪切模量与屈服应力, m , β 为正常数 ($\beta \geq 1$), 下标 a 为大气压力, 下标 o 表示初始状态. 为后面讨论方便起见, 可将单向拉伸或压缩情况下的本构关系 (2.2) 表示为

$$p = \begin{cases} w(V) - 2Y/3, & p < p_1, \\ w(V) + 4\tau/3, & p_1 \leq p \leq p_2, \\ w(V) + 2Y/3, & p > p_2, \end{cases} \quad (2.3a)$$

其中

$$\begin{aligned} p_1 &= w(V_o e^{(2\tau_o - Y)/(2G)}) - \frac{2}{3}Y, \\ p_2 &= w(V_o e^{(2\tau_o + Y)/(2G)}) + \frac{2}{3}Y, \end{aligned} \quad (2.3b)$$

下标 1, 2 分别表示拉伸、压缩屈服点.

当拉伸应力过大并达到下述内聚力失效准则时将出现瞬态断裂:

$$p = p_v, \quad (2.4)$$

下标 v 表示瞬态断裂. 假设断裂裂缝中为真空, 同时考虑到介质断裂后在断裂处不再能承受拉力, 本构关系 (2.3) 变为

$$p = \max(p, \varphi p_v), \quad (2.5)$$

其中 $\varphi = 0, 1$, 分别表示经历史上出现过与未出现过断裂. 此外, 当下述累积损伤准则得到满足时将发生损伤断裂 [8]:

$$\int_0^\delta \left(\frac{p_f - \min(p, p_f)}{|p_f|} \right)^\lambda dt = K, \quad (2.6)$$

p_f 为出现累积损伤的应力上限, δ 为发生损伤断裂的时间, λ 、 K 为常数. 上述本构关系及断裂模型可应用于实际问题计算, 如文献 [9].

3. Riemann 问题

3.1 解的构成与求解

考虑守恒律方程组 (2.1) 与如下初始条件组成的 Riemann 问题:

$$U_{t=0} = \begin{cases} H_l, & r < r_0, \\ H_r, & r > r_0, \end{cases} \quad (3.1)$$

其中 $H = (V, u)^T$, r_0 为常数, 下标 l, r 分别表示 r_0 的左、右侧. 假设间断 (3.1) 分解后介质仅作单向拉伸或单向压缩, 故 $p-V$ 关系由 (2.3) 给出. 一般来说, 双曲守恒律方程组 Riemann 问题的解由初等波组成, 但其具体结构与所考虑问题有关 [10,11,6]. 由于本构关系 (2.2) 存在屈服点, 间断 (3.1) 分解后接触间断两侧可能出现双波结构, 即弹性激波与塑性激波, 或弹性稀疏波与塑性稀疏波. 当下述判据成立 ($c = \sqrt{\partial p / \partial \rho}$, 为音速):

$$u_l - u_r \leq \int_{\rho_l}^{\rho_v} \frac{c}{\rho} d\rho + \int_{\rho_r}^{\rho_v} \frac{c}{\rho} d\rho A\#, \quad (3.2)$$

间断 (3.1) 分解后有真空区出现. 判据 (3.2) 对应于 $p \leq p_v$. 我们用中心激波、稀疏波、接触间断以及常数区、真空区组成上述 Riemann 问题的解.

间断分解 I 如果判据 (3.2) 不成立, 则 Riemann 问题 (2.1) 与 (3.1) 的解由常数区以及从左至右联接这些常数区的单重或双重激波 (稀疏波)、接触间断、单重或双重激波 (稀疏波) 构成.

间断分解 II 如果判据 (3.2) 成立, 则 Riemann 问题 (2.1) 与 (3.1) 的解由常数区以及从左至右联接这些常数区的单重或双重激波 (稀疏波)、真空区、单重或双重激波 (稀疏波) 构成.

下面先讨论间断分解 I. 以上标 $*$ 表示间断分解后接触间断处, 下标 s 表示 l 或 r .

1) $P^* \leq P_1$. 此时在 s 侧出现双重稀疏波. 对于稀疏波, Riemann 不变量沿特征线为常数, 故对于弹性稀疏波与塑性稀疏波分别有

$$u_1 - u_s = \pm \int_{\rho_s}^{\rho_1} \frac{c}{\rho} d\rho, \quad u^* - u_1 = \pm \int_{\rho_1}^{\rho^*} \frac{c}{\rho} d\rho. \quad (3.3)$$

此二式可合并为

$$u^* - u_s = \pm \int_{\rho_s}^{\rho^*} \frac{c}{\rho} d\rho. \quad (3.4)$$

2) $P_1 < P^* \leq P_s$. 此时仅出现弹性稀疏波, (3.4) 仍成立.

3) $P_s < P^* \leq P_2$. 此时出现弹性激波. 由 (2.1) 可得如下 Rankine-Hugoniot 条件:

$$\pm W_e(V^* - V_s) + (u^* - u_s) = 0, \quad (3.5a)$$

$$\pm W_e(u^* - u_s) - (P^* - P_s) = 0. \quad (3.5b)$$

式中 W_e 为 Lagrange 坐标中弹性激波波速, $\pm$ 为波动方向, 正、负号分别表示向右、向左. 由 (3.5) 可得

$$u^* - u_s = \pm \frac{P^* - P_s}{W_e}, \quad (3.6a)$$

$$W_e = \sqrt{\frac{P^* - P_s}{V_s - V^*}}. \quad (3.6b)$$

4) $P_2 < P^* \leq P_3$. 下标 3 表示过驱压力点: $(P_3 - P_2)/(V_3 - V_2) = (P_2 - P_s)/(V_2 - V_s)$. 此时出现双重激波结构. 由弹性激波与塑性激波的 R-H 条件我们可以推出

$$u^* - u_s = \pm \left(\sqrt{(P_2 - P_s)(V_s - V_2)} + \frac{P^* - P_2}{W_p} \right). \quad (3.7a)$$

$$W_p = \sqrt{\frac{P^* - P_2}{V_2 - V^*}}. \quad (3.7b)$$

此处 W_p 为 Lagrange 坐标中塑性激波波速.

5) $P^* > P_3$. 此时又出现稳定的单重激波结构. 类似于 3) 中的讨论, 我们有

$$u^* - u_s = \pm \frac{P^* - P_s}{W_{ep}}, \quad (3.8a)$$

$$W_{ep} = \sqrt{\frac{P^* - P_s}{V_s - V^*}}. \quad (3.8b)$$

式中 W_{ep} 为 Lagrange 坐标中弹塑性激波波速.

综上所述, 在无真空状态情形下

$$u^* - u_s = \pm f(V_s, P_s, P^*), \quad (3.9a)$$

其中

$$f(V_s, P_s, P^*) = \begin{cases} \int_{\rho_s}^{\rho^*} \frac{c}{\rho} d\rho, & P^* \leq P_s, \\ \frac{P^* - P_s}{W_e}, & P_s < P^* \leq P_2, \\ \sqrt{(P_2 - P_s)(V_s - V_2)} + \frac{P^* - P_2}{W_p}, & P_2 < P^* \leq P_3, \\ \frac{P^* - P_s}{W_{ep}}, & P^* > P_3. \end{cases} \quad (3.9b)$$

为求解 (3.9a), 由其中消去 u^* 得到

$$f(V_l, P_l, P^*) + f(V_r, P_r, P^*) - (u_l - u_r) = 0, \quad (3.10)$$

并采用 Newton 法:

$$P^{(n+1)} = P^{(n)} - \left(\frac{F_1(P)}{dF_1(P)/dP} \right)^{(n)}. \quad (3.11a)$$

这里

$$F_1(P) \equiv f(V_l, P_l, P) + f(V_r, P_r, P) - (u_l - u_r), \quad (3.11b)$$

$$P^{(0)} = P_v. \quad (3.11c)$$

求解过程中所需 V 值亦可由 (2.3) 用 Newton 法求得. 求出 P^* 后, 将其代入 (3.9a) 与 (2.3) 可分别得到 u^* 与 V^* .

现在讨论间断分解 II. 此时出现真空, 上述讨论仍成立, 但

$$P^* = 0. \quad (3.12)$$

从而,

$$u^* = \pm f(V_s, P_s, 0) + u_s. \quad (3.13)$$

(2.3) 给出 V^* .

3.2 解的存在、唯一性与求解的收敛性

引理. $f(V_s, P_s, P)$ 连续, 且其一、二阶导数分别恒正、恒负.

证明. 由于 $f(V_s, P_s, P)$ 在 $(-\infty, P_s]$, $(P_s, P_2]$, $(P_2, P_3]$, $(P_3, +\infty)$ 内连续, 同时不难推知

$$\lim_{P \rightarrow P_s-0} f(V_s, P_s, P) = \lim_{P \rightarrow P_s+0} f(V_s, P_s, P) = 0, \quad (3.14a)$$

$$\lim_{P \rightarrow P_2-0} f(V_s, P_s, P) = \lim_{P \rightarrow P_2+0} f(V_s, P_s, P) = f(V_s, P_s, P_2), \quad (3.14b)$$

$$\lim_{P \rightarrow P_3-0} f(V_s, P_s, P) = \lim_{P \rightarrow P_3+0} f(V_s, P_s, P) = f(V_s, P_s, P_3), \quad (3.14c)$$

故 $f(V_s, P_s, P)$ 处处连续. 由 (3.9b) 可以推出

$$\frac{df(V_s, P_s, P)}{dP} = \begin{cases} \frac{1}{C}, & P \leq P_s, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{W_e} + \frac{W_e}{C^2} \right), & P_s < P \leq P_2, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{W_p} + \frac{W_p}{C^2} \right), & P_2 < P \leq P_3, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{W_{ep}} + \frac{W_{ep}}{C^2} \right), & P > P_3. \end{cases} \quad (3.15)$$

其中 $C \equiv \sqrt{-\partial P / \partial V}$, 为 Lagrange 音速. 此外, 经冗长计算可得:

$$\frac{d^2 f(V_s, P_s, P)}{dP^2} = \begin{cases} -\frac{\beta+1}{2C^3V}, & P \leq P_1, \\ -\frac{1}{2C^5} \left(\frac{m(\beta+1)V_a^\beta}{\rho_{ref} V^{\beta+1}} + \frac{4G}{3\rho_{ref} V^2} \right), & P_1 < P \leq P_s, \\ -\frac{1}{2C^4} \left(\frac{(W_e^2 - C^2)^2}{2W_e^3(V_s - V)} + \frac{m(\beta+1)W_e V_a^\beta}{\rho_{ref} C^2 V^{\beta+2}} + \frac{4GW_e}{3\rho_{ref} C^2 V^2} \right), & P_s < P \leq P_2, \\ -\frac{1}{2C^4} \left(\frac{(W_p^2 - C^2)^2}{2W_p^3(V_s - V)} + \frac{(\beta+1)W_p}{V} \right), & P_2 < P \leq P_3, \\ -\frac{1}{2C^4} \left(\frac{(W_{ep}^2 - C^2)^2}{2W_{ep}^3(V_s - V)} + \frac{(\beta+1)W_{ep}}{V} \right), & P > P_3, \end{cases} \quad (3.16)$$

易见 $f(V_s, P_s, P)$ 的一、二阶导数分别恒正、恒负. 引理证毕.

定理 (1) 以间断分解 I 或 II 构造的 Riemann 问题 (2.1) 与 (3.1) 的解存在并且唯一;
(2) 在间断分解 I 情形, Newton 迭代法 (3.11) 收敛到此唯一解.

证明. (1). 先考察间断分解 I. 我们令

$$F_2(P) \equiv f(V_l, P_l, P) + f(V_r, P_r, P). \quad (3.17)$$

由于此时 (3.2) 不成立, 于是有

$$u_l - u_r > \int_{\rho_l}^{\rho_v} \frac{c}{\rho} d\rho + \int_{\rho_r}^{\rho_v} \frac{c}{\rho} d\rho = F_2(P_v), \quad (3.18)$$

此即

$$F_1(P_v) < 0. \quad (3.19)$$

又由 $F_1(P)$ 的定义知道

$$F_1(+\infty) = +\infty. \quad (3.20)$$

前述引理表明, $F_1(P)$ 为单调递增函数. 从而, $F_1(P)$ 通过且仅通过一次零点, 即 (3.10) 具有唯一解 P^* . 由 (3.9a) 与 (2.3) 可知, P^* 的存在与唯一性决定了 u^* 与 V^* 的存在与唯一性.

再考察间断分解 II. 此时, 显然 (3.12)、(3.13)、与 (2.3) 决定了 P^* 、 u^* 、 V^* 的存在与唯一性.

(2). 设有一区间 (P_v, M) , M 充分大以至 $F_1(M) > 0$, $P^* \in (P_v, M)$. 我们由 (3.19), (3.20), 以前述引理推知 1) $F_1(P_v)F_1(M) < 0$; 2) $dF_1(P)/dP \neq 0$; 3) $dF_1^2(P)/dP^2 < 0$; 4) $(F_1(P) \cdot dF_1^2(P)/dP^2)_{P=P_v} > 0$. 容易证明 (可参见 [12]), 迭代 (3.11) 收敛到其不动点:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)} = P^*. \quad (3.21)$$

定理证毕.

4. 广义 Riemann 问题

为给出下一节中建立数值格式所需的分解状态时间导数, 考虑 (2.1) 的如下初值问题:

$$U_{t=0} = \begin{cases} Q_l(r), & r < r_0, \\ Q_r(r), & r > r_0. \end{cases} \quad (4.1)$$

此处 $Q(r) = (V(r), u(r))^T$, $Q(r)$ 的各分量为 r 的线性函数, 且

$$\lim_{r \rightarrow r_0-0} Q_l(r) = H_l, \quad \lim_{r \rightarrow r_0+0} Q_r(r) = H_r. \quad (4.2)$$

我们称初值问题 (2.1)、(4.1) 为 Riemann 问题 (2.1) 与 (3.1) 的广义 Riemann 问题. 我们假设此广义 Riemann 问题与前述 Riemann 问题具有相同波系的局部解, 并采用 van Leer [5] 的思路求解时间导数项 $(\partial u / \partial t)^*$, $(\partial P / \partial t)^*$.

先讨论无真空的情形. 当 $P^* \leq P_s$, 式 (3.4) 成立. 在其两侧对时间求全导数

$$\frac{D}{Dt}(u^* - u_s) = \pm \frac{D}{Dt} \int_{\rho_s}^{\rho^*} \frac{c}{\rho} d\rho. \quad (4.3)$$

利用 (2.1), 由 (4.3) 经直接运算可得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^* \pm \left(-\frac{1}{C^*}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^* = \pm C_s \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_s - \left(\frac{\partial P}{\partial r}\right)_s, \quad P^* \leq P_s. \quad (4.4)$$

同理可得

$$\begin{aligned} & \left(\frac{W_e^2}{2C^{*2}} + \frac{3}{2}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^* \pm \left(-\frac{3W_e}{2C^{*2}} - \frac{1}{2W_e}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^* \\ = & \pm \left(\frac{3W_e}{2} + \frac{C_s^2}{2W_e}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_s - \left(\frac{W_e^2}{2C_s^2} + \frac{3}{2}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial r}\right)_s, \quad P_s < P^* \leq P_2. \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{W_p^2}{2C^{*2}} + \frac{3}{2}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^* \pm \left(-\frac{3W_p}{2C^{*2}} - \frac{1}{2W_p}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^* \\ = & \pm \left(\frac{3W_e}{2} + \frac{C_s^2}{2W_e}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_s - \left(\frac{W_e^2}{2C_s^2} + \frac{3}{2}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial r}\right)_s, \quad P_2 < P^* \leq P_3. \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{W_{ep}^2}{2C^{*2}} + \frac{3}{2}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^* \pm \left(-\frac{3W_{ep}}{2C^{*2}} - \frac{1}{2W_{ep}}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^* \\ = & \pm \left(\frac{3W_{ep}}{2} + \frac{C_s^2}{2W_{ep}}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_s - \left(\frac{W_{ep}^2}{2C_s^2} + \frac{3}{2}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial r}\right)_s, \quad P^* > P_3. \end{aligned} \quad (4.7)$$

(4.4) 至 (4.7) 中的一右波、一左波公式组成了如下求解分解状态时间导数的线性方程组:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^* \\ \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

其中 a_{km} 及 b_k ($k, m=1, 2$) 由 (4.4)-(4.7) 给出. 显然 $a_{km} > 0$, 因此

$$DET(a_{km}) = a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} > 0. \quad (4.9)$$

由线性代数得知如下结论:

命题 求解间断分解状态时间导数的线性方程组 (4.8) 具有唯一解.

当出现真空状态时, 在断裂面上压力为零, 从而

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^* = 0. \quad (4.10)$$

断裂面上的速度可将 (4.10) 代入 (4.4)–(4.7) 后求得. 在左、右断裂面上分别有

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^* = \frac{b_1}{a_{11}}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^* = \frac{b_2}{a_{21}}. \quad (4.11)$$

5. 差分格式

考虑网格单元 $[t^n, t^{n+1}] \times [r_i, r_{i+1}]$. 将方程 (2.1) 在此单元上积分, 利用 Green 公式, 并略去三阶小量得到二阶精度公式:

$$\bar{V}_{i+1/2}^{n+1} = \bar{V}_{i+1/2}^n + \lambda_{i+1/2}^n (\langle u \rangle_{(i+1)-}^n - \langle u \rangle_{i+}^n). \quad (5.1a)$$

$$\bar{u}_{i+1/2}^{n+1} = \bar{u}_{i+1/2}^n - \lambda_{i+1/2}^n (\langle P \rangle_{(i+1)-}^n - \langle P \rangle_{i+}^n), \quad (5.1b)$$

其中

$$\langle u \rangle = u^* + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^* \Delta t, \quad \langle P \rangle = P^* + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^* \Delta t, \quad (5.1c)$$

$\lambda_{i+1/2}^n = \Delta^n t / \Delta_{i+1/2} r$, 而 $\Delta^n t = t^{n+1} - t^n$, $\Delta_{i+1/2} r = r_{i+1} - r_i$, 分别为时间、空间步长. 空间步长可不等距. (5.1c) 中诸量由时刻 t^n 、节点 r_i 处的 3、4 节所述 Riemann 问题与广义 Riemann 问题的解给出. 节点 r_i 处的初始间断由线性分布为

$$\bar{u}_{i\pm 1/2}^n + \frac{\Delta_{i\pm 1/2}^n u^*}{2} (r - r_{i\pm 1/2}), \quad (5.2a)$$

$$\bar{P}_{i\pm 1/2}^n + \frac{\Delta_{i\pm 1/2}^n P^*}{2} (r - r_{i\pm 1/2}), \quad (5.2b)$$

其中 $\Delta_{i+1/2}^n u^* = \langle u \rangle_{(i+1)-}^{n-1} - \langle u \rangle_{i+}^{n-1}$, $\Delta_{i+1/2}^n P^* = \langle P \rangle_{(i+1)-}^{n-1} - \langle P \rangle_{i+}^{n-1}$. 假设在 t^n 至 t^{n+1} 间, 各网格单元内介质为单向拉伸或压缩, 由 (2.2) 有

$$\bar{P}_{i+1/2}^{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{\rho_{ref.}} (w(\bar{V}_{i+1/2}^{n+1}) - \frac{2}{3}Y), & \bar{P}_{i+1/2}^{n+1} < P_{i+1/2,1}^{n+1}, \\ \frac{1}{\rho_{ref.}} (w(\bar{V}_{i+1/2}^{n+1}) + \frac{4}{3}\bar{\tau}_{i+1/2}^{n+1}), & P_{i+1/2,1}^{n+1} \leq \bar{P}_{i+1/2}^{n+1} \leq P_{i+1/2,2}^{n+1}, \\ \frac{1}{\rho_{ref.}} (w(\bar{V}_{i+1/2}^{n+1}) + \frac{2}{3}Y), & \bar{P}_{i+1/2}^{n+1} > P_{i+1/2,2}^{n+1}, \end{cases} \quad (5.3a)$$

$$\bar{\tau}_{i+1/2}^{n+1} = \bar{\tau}_{i+1/2}^n - G \ln \frac{\bar{V}_{i+1/2}^{n+1}}{\bar{V}_{i+1/2}^n}, \quad (5.3b)$$

$$\begin{aligned} P_{i+1/2,1}^{n+1} &= \frac{1}{\rho_{ref.}} (w(\bar{V}_{i+1/2}^n e^{(2\bar{\tau}_{i+1/2}^n - Y)/(2G)}) - \frac{2}{3}Y), \\ P_{i+1/2,2}^{n+1} &= \frac{1}{\rho_{ref.}} (w(\bar{V}_{i+1/2}^n e^{(2\bar{\tau}_{i+1/2}^n + Y)/(2G)}) + \frac{2}{3}Y). \end{aligned} \quad (5.3c)$$

我们假设断裂能且仅能发生在网格结点处. Riemann 问题的解决定节点 r_i 处是否发生瞬态断裂. 下述判据决定节点 r_i 处是否发生损伤断裂:

$$\Sigma_n \left(\frac{P_f - \min((\bar{P}_{i-1/2}^n + \bar{P}_{i+1/2}^n)/2, P_f)}{|P_f|} \right) \lambda \Delta^n t = K. \quad (5.4)$$

断裂位置采用下式跟踪:

$$x_{i\pm}^{n+1} = x_{i\pm}^n + \langle u \rangle_{i\pm}^n \Delta^n t. \quad (5.5)$$

(5.1)—(5.5) 为本文计算流体弹塑性介质的差分格式, 它保持了 van Leer [5] 计算连续气体介质 MUSCL 格式的高精度、高分辨率的特点, 同时还可模拟断裂发生、发展过程. 在 (5.2) 中取 $\Delta_{i+1/2}^n u^* = \Delta_{i+1/2}^n P^* = 0$, 本文格式成为一阶格式. 为防止数值振荡, 采用文献 [5] 中的保单调算法 (101) 式. 此外, 为减小由于出现真空而引起的数值误差, 采用 [6] 提出的保密度下限算法. 下述为其中的一种:

$$\Delta_{i+1/2}^n u^* = \min \left(\Delta_{i+1/2}^n u^*, \bar{V}_{i+1/2}^n \left(1 - \frac{\bar{V}_{i+1/2}^n}{V_v} \right) \frac{\Delta_{i+1/2}^n r}{\Delta_{i+1/2}^n t} \right). \quad (5.6)$$

为使计算顺利进行, 还应对时间步长作一定限制. 网格单元内波系不相交:

$$\Delta^n t \leq \frac{CFL \Delta_{i+1/2}^n r}{2 \max(|W_{i+}^n|, |W_{(i+1)-}^n|)}, \quad (5.7)$$

W_i^n 为激波波速或稀疏波波头速度, $CFL \leq 1$. 单元不畸变 ($\Delta_{i+1/2}^n u^* < 0$):

$$\Delta^n t \leq -\frac{x_{(i+1)-}^n - x_{i+}^n}{\Delta_{i+1/2}^n u^*}. \quad (5.8)$$

断裂处单元不重叠 ($\langle u \rangle_{i-}^n > \langle u \rangle_{i+}^n$):

$$\Delta^n t \leq \frac{x_{i+}^n - x_{i-}^n}{\langle u \rangle_{i-}^n - \langle u \rangle_{i+}^n}. \quad (5.9)$$

对于振荡应力问题, $\Delta^n t$ 还受振荡频率限制.

6. 数值算例

6.1 Riemann 问题计算

计算如下两组 Riemann 问题:

$$I \quad \begin{cases} \rho = 7802.32 \text{ kg/m}^3, u = 50 \text{ m/s}, p = 10^8 \text{ Pa}, & x < 0, \\ \rho = 7846.85 \text{ kg/m}^3, u = -50 \text{ m/s}, p = 2 \times 10^9 \text{ Pa}, & x > 0, \end{cases} \quad (6.1)$$

$$II \quad \begin{cases} \rho = 8046.83 \text{ kg/m}^3, u = -1000 \text{ m/s}, p = 8 \times 10^9 \text{ Pa}, & x < 0, \\ \rho = 7882.14 \text{ kg/m}^3, u = 1000 \text{ m/s}, p = 3 \times 10^9 \text{ Pa}, & x > 0. \end{cases} \quad (6.2)$$

采用文献 [9]、[13] 的钢材参数:

$$\begin{aligned} \rho_a &= 7800 \text{ kg/m}^3, m = 2.225 \times 10^{11} \text{ Pa}, \beta = 3.7, \\ G &= 0.853 \times 10^{11} \text{ Pa}, Y = 0.00979 \times 10^{11} \text{ Pa}, p_v = -0.2 \times 10^{11} \text{ Pa}, \\ p_f &= -0.019292 \times 10^{11} \text{ Pa}, \lambda = 1.33, K = 3.35 \times 10^{-6} \text{ s}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

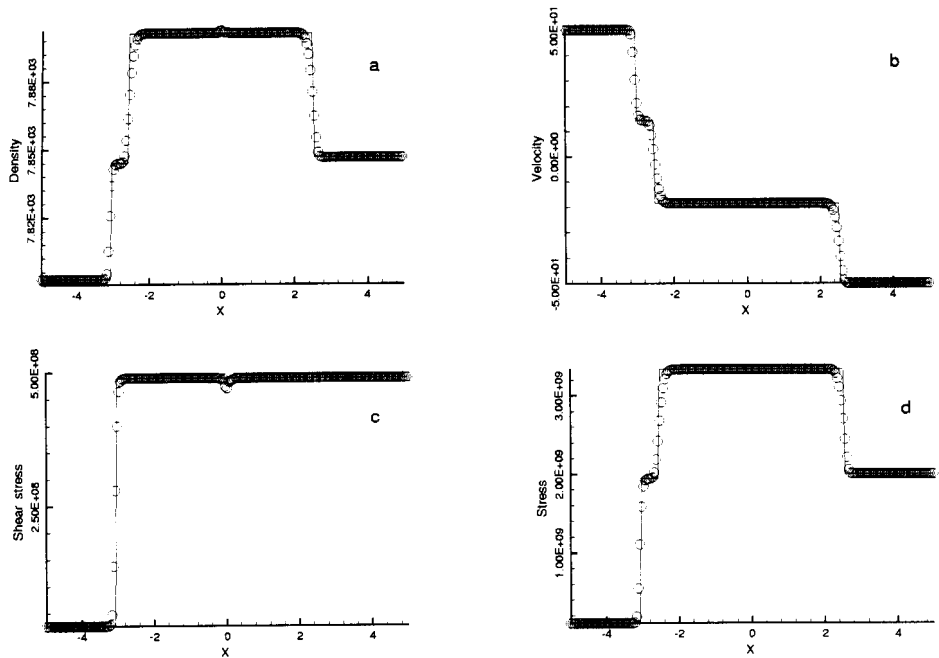


图 1 Riemann 问题 I. 网格数 200, 时间步数 150, CFL=1. 实线为解析解, 离散点为数值解.

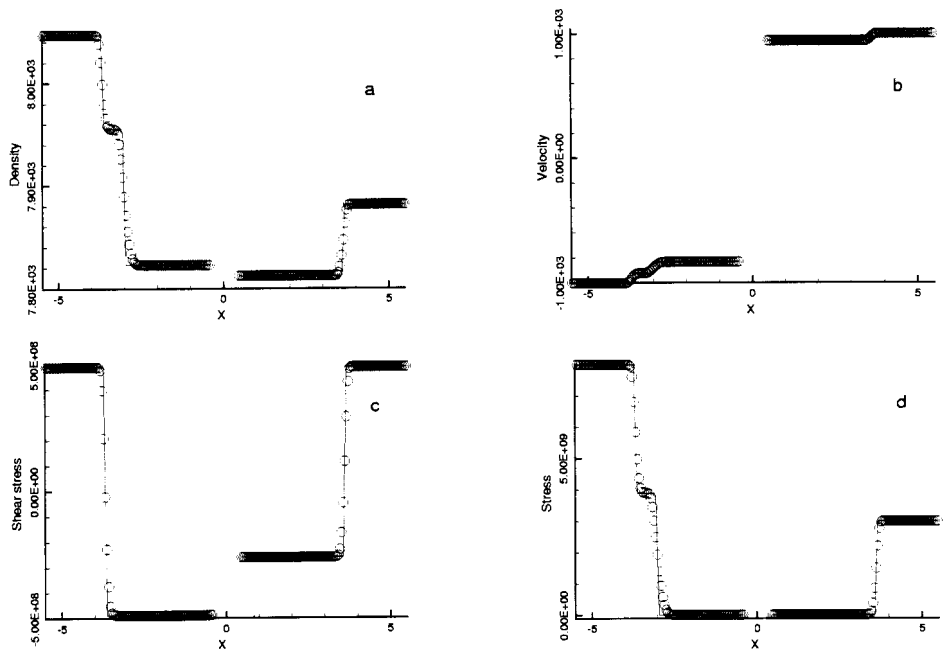


图 2 Riemann 问题 II. 网格数 200, 时间步数 160, CFL=1. 实线为解析解, 离散点为数值解.

I) 对应于两钢板碰撞. 其结果是一弹性激波与一塑性激波向左传播, 一弹性激波向右传播.
II) 对应于钢板受拉而瞬态断裂. 其结果是一弹性稀疏波与一塑性稀疏波向左传播, 一弹性稀疏波向右传播, 同时中间出现断裂区. 计算结果如图 1, 2. 对比解析解可见, 数值解给出了弹、塑性波、及断裂区, 并具有满意的精度. 数值解在弹、塑性激波前后无明显振荡, 其

激波分辨率与文献 [1] 的结果相当.

6.2 爆轰波作用下钢板层裂计算

在 $x = 0$ 处左、右两侧分别安放 1 米厚炸药与 1 米厚钢板. 炸药由其左侧引爆, 炸药产物向左自由飞散, 同时爆轰波向右传播. 当爆轰波传播到钢板左侧面时开始数值计算. 取炸药密度为 1600kg/m^3 , 其产物的等效绝热指数为 1.4, 爆轰波速为 7667m/s . 炸药产物采用 [6] 中的方法计算. 钢板参数为 (6.3). 钢板在初始时刻 $\rho = \rho_a$, $u = 0$, $p = p_a$. 计算中在钢板右端给出边界条件 $p = p_a$.

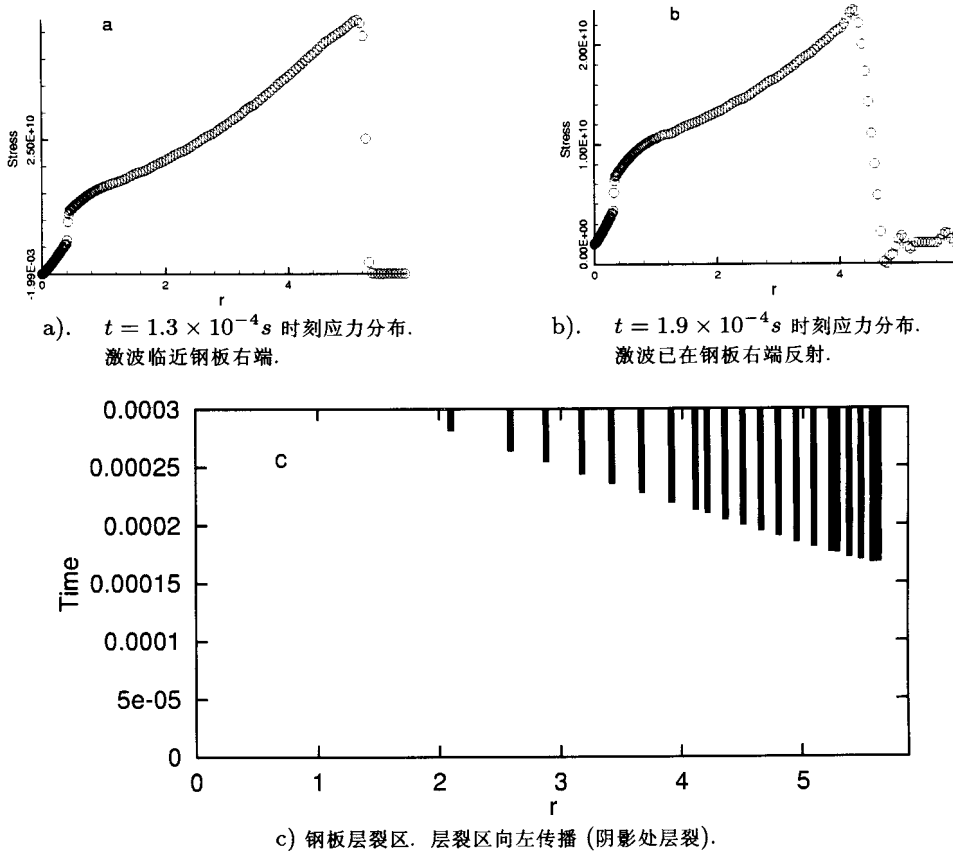


图 3 钢板层裂问题. 钢板左、右端分别在 $r = 1, 5.875$ ($\rho_{ref.} = 1600\text{kg/m}^3$). 钢板网格数 100, CFL=1.

图 3 为计算结果. 数值解表明, 本文的 Godunov 方法清晰地分辨出了爆轰波冲击钢板后在钢板中产生的激波 (图 3a). 由于激波强度远大于屈服强度, 弹性前驱波被塑性波掩盖, 图 3a 中激波为塑性波. 本文方法还计算出了激波在钢板右侧面反射后, 钢板受拉而出现累积损伤断裂的现象 (图 3b). 计算出的层裂过程与 [9] 所述结果相似, 即最先出现主裂片, 而后从主裂片发生处开始出现向左传播的层裂区 (图 3c).

7. 结束语

本文成功地建立了一种计算流体弹塑性介质中波动、断裂现象的二阶 Godunov 方法. 文中方法可用于材料冲击、断裂的机理研究. 本文算法与 [6] 中方法体系相同, 二者可组成

一套气、水、固体、层裂或空穴系统的数值模拟方法^[14]。此外,将本文的方法向高维情形推广是一项有意义的工作,值得研究。

致谢: 笔者曾与卢子兴等同志多次讨论,在此表示感谢。

参 考 文 献

- [1] J. Trangenstei, P. Colella. A higher-order Godunov method for modelling finite deformation in elastic-plastic solids, *Comm. Pure Appl. Math.*, **44**(1991), 41-100.
- [2] F. Wang, J. G. Glimm, J. W. Grove, B. J. Plohr. A conservative Eulerian numerical scheme for elastoplasticity and application to plate impact problems, *Impact Comput. Sci. Engrg.*, **5**(1993), 285-308.
- [3] G. H. Miller, E. G. Puckett. A high-order Godunov method for multiple condensed phases, *J. Comput. Phys.*, **128**(1996), 134-164.
- [4] 郑哲敏. 流体弹塑性体, 中国大百科全书, 力学, 中国大百科全书出版社, 1985, 343-345.
(Z. M. Zheng. Hydro-elasto-plastic body, *Chinese Encyclopedia, Mechanics*, Encyclopedia Press (Beijing), 1985, 343-345)
- [5] B. van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme, V. A second-order sequel to Godunov's method, *J. Comput. Phys.*, **32**(1979), 101-136.
- [6] H. S. Tang, D. Huang. A second-order accurate capturing scheme for 1D inviscid flows of gas and water with vacuum zones, *J. Comput. Phys.*, **128**(1996), 301-318. (或: 汤寒松. 北京大学数学系博士论文, 1993)
- [7] 汤寒松. 水激波管内空穴现象数值模拟, 水动力学研究与进展, A 辑, **12**(1997), 175-180.
(H. S. Tang. Numerical study of cavitation phenomenon in water shock tube, *J. Hydrodynamics*, Ser. A, **12**(1997), 175-180)
- [8] F. R. Tuler, M. B. Butcher. A criterion for the time dependence of dynamic fracture, *Int. J. Fra. Mech.*, **4**(1968), 431-437.
- [9] 朱兆祥, 李永池, 王肖钧. 爆炸作用下钢板层裂的数值分析, 应用数学与力学, **2**(1981), 353-376.
(C. H. Chu, Y. C. Li, and X. J. Wang. Numerical analysis of steel plate's spallation due to explosion, *Appl. Math. and Mech.*, **2**(1981), 353-376)
- [10] P. Lax. Hyperbolic systems of conservation laws, *Comm. Pure Appl. Math.*, **10**(1957), 537-566.
- [11] T. P. Liu, J. A. Smoller. On the vacuum state for the isentropic gas dynamics equations, *Adv. in Appl. Math.*, **1**(1980), 345-359.
- [12] 曹志浩, 张玉强, 李瑞遐. 矩阵计算与方程求根 (第二版), 高等教育出版社, 1979.
(Z. H. Zhao, Y. D., Zhang, and R. X. Li. *Computing Matrixes and Solving Equations*, 2nd ed., High education Press (Beijing), 1979)
- [13] 段祝平, 孙琦清, 扬大光, 田兰桥, 褚瑶. 高应变率下金属动力学性能的实验与理论研究, 力学进展, **10**(1980), 1-16.
(Z. P. Duan, C. Q. Shuan, D. G. Yuang, N. Q. Tian, and Y. Cu. Experimental and theoretical studies on dynamical features of metals under high ratio of strain, *Progress in Mech.*, **10**(1980), 1-16)
- [14] H. S. Tang, F. Sotiropoulos. A second-order Godunov method for wave problems in coupled solid-water-gas systems, *J. Comput. Phys.*, in press(1999).