

关于分区模拟无粘流内边界 守恒算法的相容性^{*}

汤寒松 李椿萱

(北京航空航天大学流体所, 100083)

摘 要 本文讨论用分区方法计算可压缩无粘流动的内边界通量守恒算法。分析指出插值型通量守恒算法不保证相容性条件, 计算表明这种不相容性能引起数值解出现明显误差, 或破坏其稳定性、收敛性。为此, 文中提出内边界采用自适应算法并给出了算例。

关键词 可压缩无粘流 内边界守恒算法 相容性 自适应算法

中图分类号 V211.3

0 引 言

用分区方法计算流体力学问题已成为引人注目的发展方向, 而其中关键之一是建立由于分区而出现的内边界上数值解的计算方法。对于无粘流动, 为使激波等间断现象顺利通过内边界, 人们提出内边界处应该通量守恒。Warming 与 Beam^[1]给出了一种迎风格式与 MacCormack 格式间守恒的相互转换方式, Rai^[2]提出了守恒线的概念以及通量重新分配的办法, Berger^[3]研究了网格界面的守恒算法。守恒算法已用于实际计算之中, 如[2]、[4]。对于高维流动、任意相交网格, 怎样实现内边界处的守恒有待研究。然而, 这些守恒算法的性质、计算效果究竟如何? 对线性情形的分析表明, 插值型守恒算法可能不稳定, 并在网格重叠处给出不唯一解^[5,6]。本文将就实际计算中经常遇到的内边界两侧数值格式不同、网格不同这两种情况, 讨论[1]、[2]、[3]的通量守恒算法的相容性, 并进行数值试验。

1 通量守恒算法

考虑一维守恒律方程组的初值问题

$$U_t + F_x(U) = 0 \quad (1a)$$

$$U|_{t=0} = U_0 \quad (1b)$$

设 $\int_{-\infty}^{+\infty} U dx$ 存在, 不计无穷处的通量, 由(1)有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U dx = \int_{-\infty}^{+\infty} U_0 dx \quad (2a)$$

^{*} 本文受国家自然科学基金、博士后科学基金资助。

1995年8月18日收到原稿, 1996年3月10日收到修改稿。

即 $\int_{-\infty}^{+\infty} U dx$ 具有守恒性。对于图 1 中两拼接子区域 A、B, 这守恒性可表示为:

$$\Delta x_A \sum_{i=-\infty}^{I-1} V_i^n + \frac{\Delta x_A + \Delta x_B}{2} V_I^n + \Delta x_B \sum_{i=I+1}^{\infty} V_i^n = \text{const}, \quad (2b)$$

这里 V 为(1)的数值解。由于问题(1)的解可能出现间断, 人们研究其积分形式的弱解, 其差分格式应反映出这种积分的特性。(2b)即为这种积分特性的重要方面。在子区域 A、B 中均采用守恒型格式:

$$V_i^{n+1} = V_i^n - \lambda_A (E_{i+1/2}^A - E_{i-1/2}^A), \quad i \leq I-1$$

$$V_i^{n+1} = V_i^n - \lambda_B (E_{i+1/2}^B - E_{i-1/2}^B), \quad i \geq I+1$$

(3a)

其中数值通量满足相容性条件, 即

$$E_{i+1/2}^A(V, \dots, V) = F(V)$$

$$E_{i+1/2}^B(V, \dots, V) = F(V)$$

(3b)

且 $\lambda = \Delta t / \Delta x$, Δt 为时间步长, Δx 为空间步长, 上、下标 A、B 分别表示子区域 A、B。内边界点 I 处的数值解可通过对 V 插值得。然而这种方法不具有守恒性(2b), 能引起激波强度与位置的明显误差。我们对一维无粘流动 Riemann 问题以及扩张管内拟一维无粘亚音速出流的计算也验证了这一点^[7]。

为满足这种守恒性, 文献[1]、[2]、[3]分别给出了实际上是对数值通量进行插值的通量守恒算法, 其典型形式为

$$V_I^{n+1} = V_I^n - \lambda_I (E_{I+1/2}^B - E_{I-1/2}^A) \quad (4)$$

这里 $\lambda_I = 2\Delta t / (\Delta x_A + \Delta x_B)$ 。(3)、(4)保证了(2b)成立。根据 Lax、Wendroff 的证明知(3)、(4)收敛解为(1)的弱解^[3]。(4)也被用到了重叠网格的计算中。(3)可看作为基本格式, (4)为扰动格式。对于 Euler 方程组, 完全从理论上分析(4)对数值解的扰动大小十分困难, 理论与数值试验相结合则可能给出一些有益的结论。

2 相容条件

设(1a)的差分格式为

$$V_i^{n+1} = H(V_{i-p}^n, \dots, V_{i+q}^n) \quad (5)$$

其中 $H(V, \dots, V) = V$, p, q 为非负整数。若对于解析解 U 有

$$U_i^{n+1} - H(U_{i-p}^n, \dots, U_{i+q}^n) = \Delta t r_1 \quad (6)$$

$\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ 时 $r_1 \rightarrow 0$, 则称(5)与(1a)相容。这里 $\Delta x = \max(\Delta x_A, \Delta x_B)$ 。相容性条件(6)是对差分格式的基本要求。

命题 1 若差分格式(5)满足

$$\sum_{k=-p}^q H_k(U, \dots, U)(U_k - U) = -\Delta t F_x(U) + O(\Delta^2) \quad (7)$$

其中 H 的下标 k 表示对第 k 个变量的偏导数, $\Delta = \max(\Delta t, \Delta x)$, 则其满足相容性条件(6)。

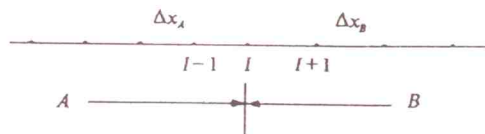


Fig. 1 Patched subdomains A and b their grids.

图 1 拼接子区域 A、B 及其网格

证明:由 Taylor 展开及(1a),并注意到 $\Delta t \sim \Delta x$, 容易证明此命题。

推论 1 在均匀网格中,若(1)的守恒型差分格式满足数值通量相容性条件,则其也满足相容性条件(6)。

证明:参考文献[8]中关于单调差分格式只有一阶精度的证明过程,可知(7)式成立。故有此推论。

命题 2 设子区域 A、B 网格相同,如果(3)满足(6),则内边界守恒算法(4)满足(6)的充要条件为

$$E_{i+1/2}^A - E_{i+1/2}^B = \Delta t r_2 \tag{9}$$

其中 $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ 时 $r_2 \rightarrow 0$ 。

证明:

$$\begin{aligned} &U_I^{n+1} - H(U_{I-p}^n, \cdots, U_{I+q}^n) \\ &= U_I^{n+1} - U_I^n + \lambda_I(E_{I+1/2}^B - E_{I-1/2}^A) \\ &= U_I^{n+1} - U_I^n + \lambda_I(E_{I+1/2}^B - E_{I-1/2}^A) + \lambda_I(E_{I-1/2}^B - E_{I-1/2}^A) \\ &= \Delta t r_1 + \lambda_I(E_{I-1/2}^B - E_{I-1/2}^A) \end{aligned} \tag{10}$$

容易看出(6)当且仅当(9)为真时成立。

(4)能否满足(6)因具体情况而异。下面分别就 A、B 中格式不同、网格不同两种情况进行讨论。

3 格式不同

此时 A、B 中网格相同,格式不同。若 I 点两侧分别为 MacCormack 格式与 Lax-Wendroff 格式

$$E_{i+1/2}^{LW} = \frac{1}{2}(F_i + F_{i+1}) - \frac{1}{2}\lambda C_{i+1/2}(F_{i+1} - F_i), i \leq I - 1 \tag{11}$$

$$E_{i+1/2}^{MacC} = \frac{1}{2}F_i(V^n - \lambda(F_{i+1} - F_i)) + \frac{1}{2}F_{i+1}, i \geq I \tag{12}$$

其中 $C = \partial F / \partial V$ 。容易验证

$$E_{i+1/2}^{MacC} - E_{i+1/2}^{LW} = \Delta t O(\Delta), \tag{13}$$

由命题 2 知(4)满足(6)。同理,由 TVNI 格式的构造知^[9]

$$E_{i+1/2}^{TVNI} - E_{i+1/2}^{LW} = O(\Delta^2) \tag{14}$$

故在 I 点 TVNI 格式与 Lax-Wendroff 格式相接,(4)亦满足(6)。对于 Lax-Friedrichs 格式,

$$E_{i+1/2}^{LF} = \frac{1}{2}(F_i + F_{i+1}) - \frac{1}{2\lambda}(V_{i+1} - V_i) \tag{15}$$

若将之与 Lax-Wendroff 格式相接

$$E_{i+1/2}^{LF} - E_{i+1/2}^{LW} = \frac{1}{2\lambda}(\lambda^2 C_{i+1/2} - K)(U_{i+1} - U_i) + O(\Delta^2) = O(\Delta) \tag{16}$$

其中 K 为单位矩阵,此时(4)不满足(6)。

由于子区域 A、B 中格式不同而(4)不满足相容性条件(6)能导致数值解在 I 点附近出现一定扰动痕迹。图 2a、2b、2c 分别为横断面为 $S(x) = 1.398 + 0.347 \tanh(0.8x - 4)$ ($0 < x <$

10)的扩张管内拟一维无粘亚、超音速出流以及初始间断在 $x=5$ 、其分解为两反向运动激波的一维无粘流动 Riemann 问题的计算结果。图中 $x=5$ 处为内边界,取 Courant 数为 0.95,实线为解析解,离散点为数值解。尽管内边界算法守恒,图 2a 中激波强度与位置有明显误差。重叠网格时采用(4)计算,若其不满足(6)内边界处的数值误差仍然出现,其表现为数值解在内边界处有明显错位且在重叠区域内不重叠(图 2d)。Warming 与 Beam 认为上述不相容性不会影响数值解的稳定性^[1]。但若在图 2d 中 A、B 内分别为 Lax-Friedrichs、Lax-Wendroff 格式,计算失稳。当(4)满足(6)时,上述流动的数值解在内边界处扰动痕迹要小得多,这可由图 2e、2f 中的计算结果看出。

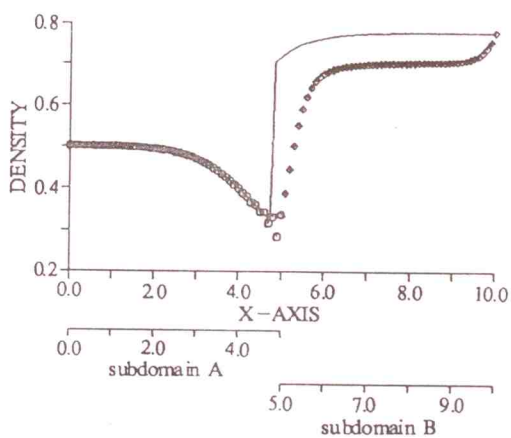


图 2(a)

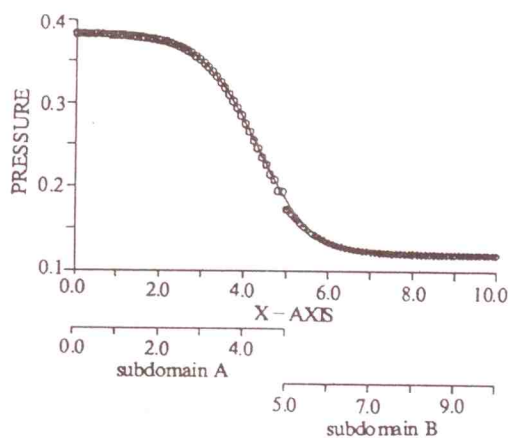


图 2(b)

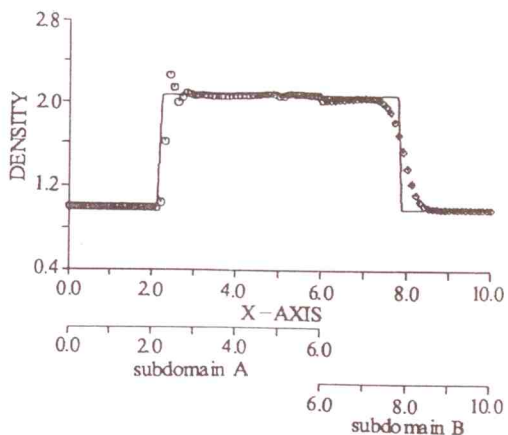


图 2(c)

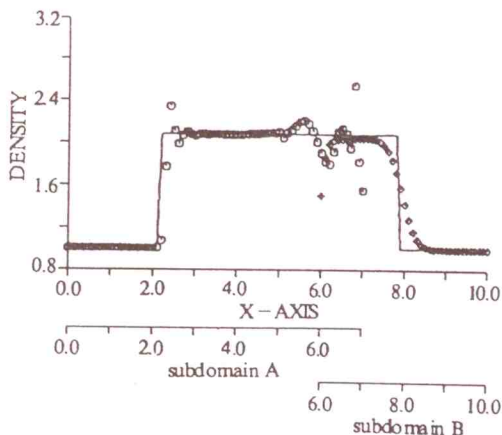


图 2(d)

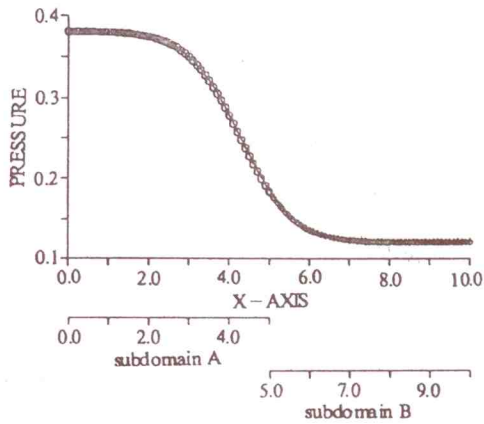


图 2(e)

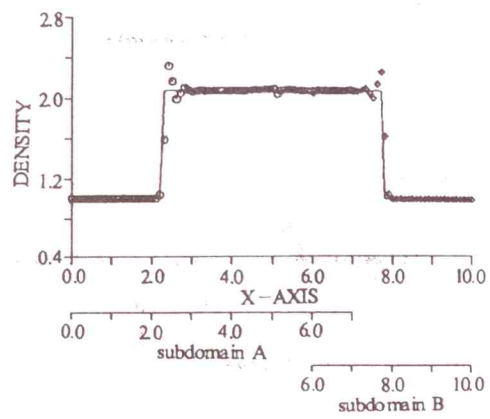


图 2(f)

Fig. 2 Numerical solution obtained with algorithm (4) and different schemes in each subdomain. $\Delta x_A = \Delta x_B = 0.1$, a), b), c), d) Lax-Wendroff and Lax-Friedrichs schemes are used respectively in subdomain A and B. e), f) Lax-Wendroff and MacCormack schemes are used respectively in subdomain A and B.

图 2 算法(4)求解内边界值, $\Delta x_A = \Delta x_B = 0.1$ 。子区域 A、B 格式不同, a)、b)、c)、d) A、B 内分别 Lax-Wendroff、Lax-friedrichs 格式; e)、f) A、B 内分别 Lax-Wendroff、MacCormack 格式。

4 网格不同

此时子区域 A、B 中网格不同, 格式相同。实际计算中这种情况的典型背景是局部加密网格。若 A、B 均为 Lax-Friedrichs 格式, 在 I 点

$$U_I^{n+1} - H(U_{I-1}^n, U_I^n, U_{I+1}^n) = \Delta t \left(\frac{\Delta x_B - \Delta x_A}{\Delta t} U_{xI}^n + O(\Delta) \right) \quad (17)$$

当 $\Delta x_A, \Delta x_B$ 相差较大而出现 $(\Delta x_B - \Delta x_A)/\Delta t \sim O(1)$, (6) 将破坏, 此时 (4) 并不与 (1a) 相容, 而与下述方程相容

$$V_t + F_x(V) = \frac{\Delta x_B - \Delta x_A}{\Delta t} V_x \quad (18)$$

$\Delta x_A, \Delta x_B$ 相差越大, 这种偏差越大。若子区域 A、B 中均为 Lax-Wendroff 格式, 可推知

$$U_I^{n+1} - H(U_{I-1}^n, U_I^n, U_{I+1}^n) = \Delta t \left(\frac{\Delta t (\Delta x_B - \Delta x_A)}{2(\Delta x_B + \Delta x_A)^2} C_I^{n2} U_{xI}^n + O(\Delta) \right) \quad (19)$$

若 $\Delta x_A, \Delta x_B$ 相差较大, $\Delta t (\Delta x_B - \Delta x_A)/(\Delta x_B + \Delta x_A)^2 \sim O(1)$, 这时 (4) 也有相容性偏差。

对上述三种流动的计算表明, 与由于格式不同引起相容性偏差相比, 因网格不均匀而出现的这种偏差可导致更为严重的数值解扰动误差, 图 3a、3b 为上述 Riemann 问题的计算结果。图 3b 中数值解精度由于 B 内网格加密反而降低, 并且网格突变处有过渡痕迹。这种偏差还可使数值解收敛不到其正确的定常解(图 3c)。 $\Delta x_A, \Delta x_B$ 相差越大, 数值解扰动误差越大。当两者相差太大, 计算失稳。

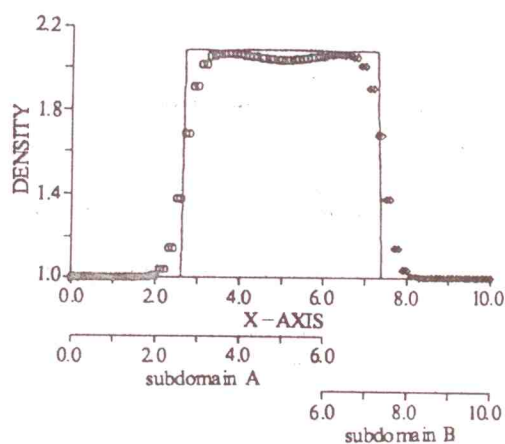


图 3(a)

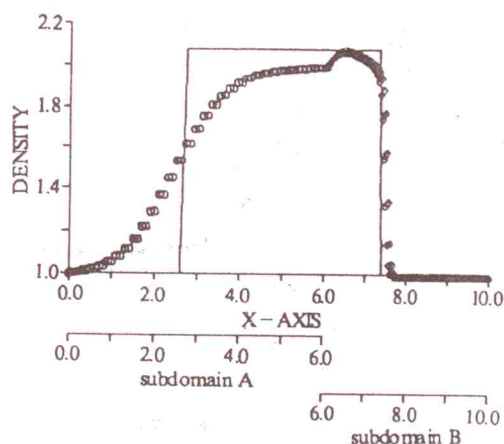


图 3(b)

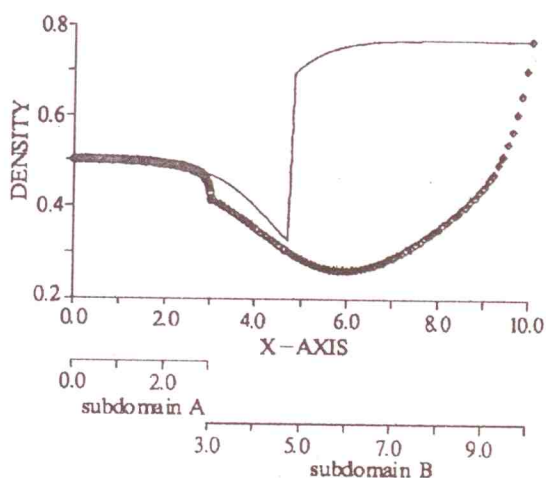


图 3(c)

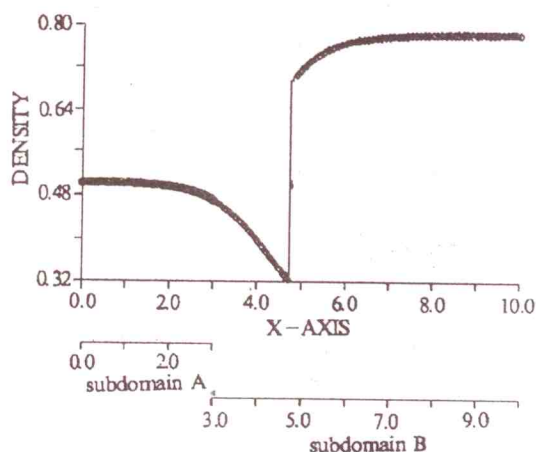


图 3(d)

fig. 3 Numerical solutions obtained with algorithm (4) and different scheme in each subdomain. a) $\Delta x_A = \Delta x_B = 0.1$, Lax-Friedrichs scheme. b) $\Delta x_A = 0.1$, $\Delta x_B = 0.0025$, Lax-Friedrichs scheme. c) $\Delta x_A = 0.025$, $\Delta x_B = 0.1$, Lax-Friedrichs scheme. d) $\Delta x_A = 0.025$, $\Delta x_B = 0.1$, Godunov scheme.

图 3 算法(4)求解内边界值。子区域 A、B 网格不同, a) $\Delta x_A = \Delta x_B = 0.1$, Lax-Friedrichs 格式; b) $\Delta x_A = 0.1$, $\Delta x_B = 0.025$, Lax-Friedrichs 格式; c) $\Delta x_A = 0.025$, $\Delta x_B = 0.1$, Lax-Friedrichs; d) $\Delta x_A = 0.025$, $\Delta x_B = 0.1$, Godunov 格式。

假设 $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ 内 V 光滑, 将(1a)沿区域 $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [t^n, t^{n+1}]$ 四周积分有

$$\bar{V}_i^{n+1} = \bar{V}_i^n - \lambda(E_{i+1/2}^G - E_{i-1/2}^G) + O(\Delta^2) \quad (20)$$

其中 $\bar{V}_i$ 为 $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ 内 V 的平均值, $E_{i+1/2}^G$ 是方程(1a)以 V_i, V_{i+1} 为初始间断的 Riemann 问题的解。(20)对变空间步长也成立。(20)不计高阶小量即为 Godunov 格式(计入二

阶小量可得 MUSCL 格式)。可见 Godunov 格式对变空间步长满足相容性条件(6)。上述三种流动的数值计算表明 Godunov 格式因网格突变导致的数值误差小。图 3d 为扩张管内亚音速出流的结果。

5 内边界守恒算法相容性修正

由上述讨论、数值计算可见,内边界用守恒算法可能出现相容性偏差与严重的数值误差。另外,又难以使内边界算法同时具有守恒性与相容性。实际上, I 点附近解间断时,(4)的守恒性十分重要,为此我们考虑在 I 点采用自适应算法

$$V_I^{n+1} = (1 - \theta_I^n)P + \theta_I^n (V_I^n - \lambda_I(E_{I+1/2}^B - E_{I-1/2}^A))$$
 (21)

其中 P 为满足相容性条件(6)的一差分格式或插值算子,,而 θ_I 为开关函数。当 I 附近解光滑时, $\theta_I = 1$, 否则, $\theta_I = 0$ 。下述为以熵作判据的一维无粘流动的跟踪间断开关函数

$$\theta = \begin{cases} \theta_I = 1, & \max p_k / \rho_k^\gamma - \min p_k / \rho_k^\gamma \geq \epsilon \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$
 (22)

其中 $I-l \leq k \leq I+m$, l, m 为正整数。图 4b、4d 为采用此开关函数的计算结果,其中, $l = m = 2$, P 分别为

$$P = (V_{I-1}^{n+1} + V_{I+1}^{n+1})/2$$
 (23)

$$P = V_I^n - 2\lambda_I(F_{I+1}^{n+1} - F_{I-1}^{n+1})$$
 (24)

对比图 2d、4a、4b 与图 3b、4c、4d,可以看出自适应算法(21)的计算结果较守恒算法(4)与非守恒算法(23)、(24)有改进。跟踪间断是自适应算法的关键,其方法已有不少研究成果。

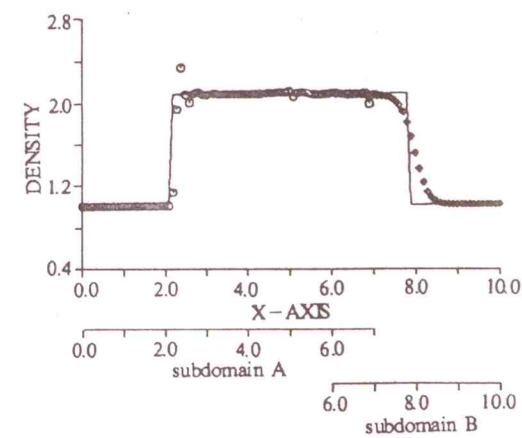


图 4(a)

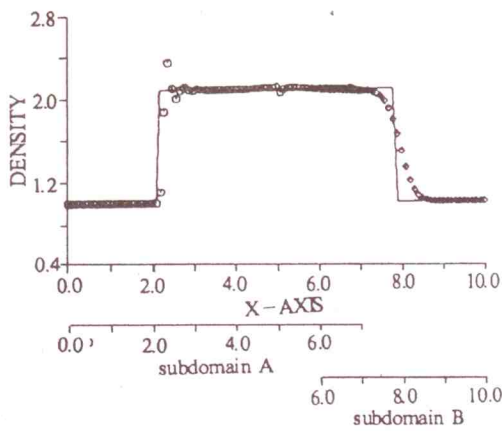


图 4(b)

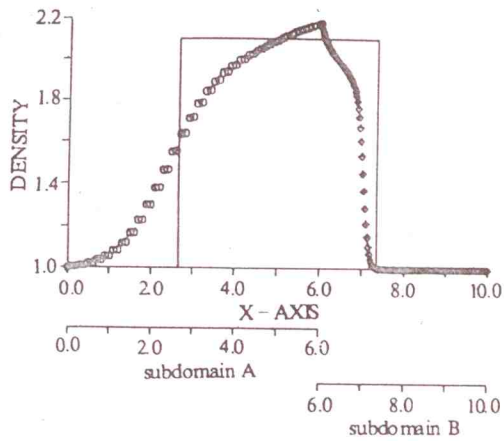


图 4(c)

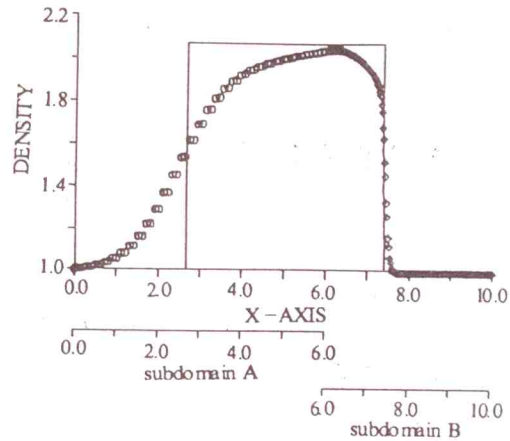


图 4(d)

fig. 4 a)Solution of the problem in fig. 2d by using(23);b)Solution of the problem in fig. 2d by using(22);c) Solution of the problem in fig. 3b by using(24);d)Solution of the problem in fig. 3b by using(22).

图 4 a)图 2d 中用(23)求解内边界值;b)图 2d 中用(22)求解内边界值;c)图 3b 中用(24)求解内边界值;d)图 3b 中用(22)求解内边界值。

6 结 语

上述分析与数值计算表明,在用分区方法计算 Euler 方程组时,对内边界算法仅仅要求通量守恒是不够的。由于各子区域内的格式与网格不同,通量守恒算法可能有相容性偏差并引起明显的数值误差。兼顾内边界的守恒性与相容性的办法之一是采用自适应算法。

致谢 本文完成过程中得到黄兰洁教授、吴子牛副教授等的帮助,在此表示感谢。

参考文献

- 1 Warming R F, and Beam M. *AIAA J*, 1976, **14**., 1241-1249.
- 2 Rai M M. *AIAA Paper* 84-0164.
- 3 Berger M J. *SIAM J Numer Anal*, 1987, **21**:967-984.
- 4 沈建雄,黄兰洁. *空气动力学报*, 1991, **9**:330-337.
- 5 Pärt E, and Sjögreen B. *Computers & Fluids*, 1994, **23**:551-574.
- 6 Wu Z N. *SIAM J Numer Anal*, 1996, **33**(4).
- 7 汤寒松. 区域分解模拟可压缩复杂流动. 北京航空航天大学博士后研究报告, 第一部分, 1995.
- 8 应隆安,滕振寰. *双曲型守恒律方程及其差分格式*. 北京:科学出版社, 1991, 第五章。
- 9 Harten A, *J Comput Phys.*, 1983, **49**:357-393.

ON THE CONSISTENCY OF CONSERVATIVE ALGORITHMS FOR INTERNAL INTERFACE IN THE SIMULATION OF INVISCID FLOW BY ZONAL METHOD

Tang Hansong and Lee Chunhian

(*Inst. of Fluid Mechanics, Beijing Univ. of Aero. & Astr.*)

ABSTRACT Conservative algorithms for internal interfaces are investigated for simulations of compressible inviscid flows by zonal methods. Analysis indicates that the conservative algorithm of interpolation type may be inconsistent with governing equations of the flows, and calculations show that this will cause severe numerical errors, and even ruin the stability and convergency of the computed solutions. Therefore, self-adaptive methods are proposed for internal interfaces and numerical examples are also presented.

KEY WORDS compressible inviscid flow; conservative algorithm for internal interface; consistency; self-adaptive method.